Correction des exercices : Intégrales

Exemple 1 :

Enoncé :

Trouver une primitive de $(x^2+3x+4)e^x$

Résolution :

1ère intégration par partie :

u=x^2+3x+4 v'=e^x

u'=2x+3 v=e^x

$$\int (x^2+3x+4)\,e^x \mathrm{dx} = (x^2+3x+4)e^x - \int (2x+3)e^x dx$$

2nd intégration par partie :

u=2x+3 v'=e^x

u'=2 v=e^x

$$\int (2x+3)e^x dx = (2x+3)e^x - \int 2e^x dx = (2x+1)e^x + \text{cste}$$

Donc,

$$\int (x^2+3x+4)\,e^x \mathrm{dx} = (x^2+3x+4)e^x - (2x+1)e^x + \text{cste}$$

$$\boldsymbol{\int (x^2+3x+4)\,e^x \mathrm{dx} = (x^2+x+3)e^x + \text{cste}}$$

Remarque : quand on se retrouve avec un produit d'une exponentielle avec un autre terme, généralement, il est conseillé d'intégrer l'exponentielle et de dériver l'autre terme.

Exemple 2 :

Enoncé :

Trouver une primitive de $\frac{\ln(x)}{x^2}$

Résolution :

A priori, deux méthodes pour résoudre cette intégrale par intégration par partie : dériver le ln et intégrer $\frac{1}{x^2}$ ou dériver le $\frac{1}{x^2}$ intégrer le ln.

- 1ère Méthode : Dérivez le ln et intégrer $\frac{1}{x^2}$

u=ln(x) $\quad$ v'=$\frac{1}{x^2}$

u'=$\frac{1}{x}$ $\quad$ v= $\frac{-1}{x}$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \frac{-\ln(x)}{x} - \int \frac{-1}{x^2} dx$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + \text{cste}$$

$$\boldsymbol{\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)+1}{x} + \text{cste}}$$

- 2ème Méthode : Dérivez $\frac{1}{x^2}$ et intégrer ln(x)

u= $\frac{1}{x^2}$ $\quad$ v'=ln(x)

u'= $\frac{-2}{x^3}$ $\quad$ v= xln(x)-x

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \frac{\ln(x)-1}{x} - \int \frac{-2\ln(x)+2}{x^2} dx$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \frac{\ln(x)-1}{x} + 2\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx - 2\int \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)-1}{x} - \frac{2}{x} + \text{cste}$$

$$\boldsymbol{\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)+1}{x} + \text{cste}}$$

Remarque : la première méthode est plus rapide, car de manière générale, il vaut mieux dériver le ln et intégrer d'autre terme. Même si les deux méthodes donnent heureusement le même résultat.

Exemple 3 :

Enoncé :

Trouver la primitive qui s'annule en 1 de $\frac{1}{\sqrt{4t-t^2}}$ avec le changement de variable $u=\frac{1}{2}t-1$

Résolution :

On a $u^2=\frac{1}{4}t^2-t+1$ puis $4t-t^2=1-u^2$

et $du=\frac{dt}{2}\Rightarrow dt=2du$

Ainsi, I devient :

$$I_3=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x+1}\frac{2dt}{\sqrt{4u^2-4}}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x+1}\frac{2dt}{2\sqrt{u^2-1}}=-[\arccos(u)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x-1}$$

$$=\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\left(\frac{1}{2}x-1\right)$$

D'où $\boldsymbol{I_3=\frac{2\pi}{3}-\arccos\left(\frac{1}{2}x-1\right)}$

Exemple 4 :

Enoncé :

Trouver une primitive de $f(x)=\frac{x}{x^3-3x+2}$

Résolution

On fait une décomposition en élément simple de la fonction à intégrer :

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{2}{9(x-1)}+\frac{1}{3(x-1)^2}-\frac{2}{9(x+2)}$$

On intègre chaque terme

$$\int\frac{dx}{x-1}=\ln|x-1|+c^{te}$$
$$\int\frac{dx}{x+2}=\ln|x+2|+c^{te}$$
$$\int\frac{dx}{(x-1)^2}=\frac{-1}{x-1}+c^{te}$$

Et donc :

$$\boldsymbol{\int\frac{xdx}{x^3-3x+2}=\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+c^{te}}$$

Exemple 5 :

Enoncé :

Calculer $I_5 = \int_{\frac{1}{2}}^{2} (1 + \frac{1}{x^2}).\arctan(x)\,.\,dx$

Résolution :

On réalise le changement de variable t=1/x d'où du=-dt/t², ainsi on a

$$I_5 = \int_2^{\frac{1}{2}} (1 + t^2) \arctan\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right).dt = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{t^2} + 1\right) \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

En additionnant les 2 formes, on a

$$2I_5 = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx$$

Or, pour $\forall x \in \mathbb{R}^+, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

D'où $2I_5 = \int_{\frac{1}{2}}^{2} (1 + \frac{1}{x^2}).\frac{\pi}{2}.dx = \frac{\pi}{2}.\left[x - \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{\pi}{2}.\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{3\pi}{2}$

Donc $\boldsymbol{I_5 = \frac{3\pi}{4}}$

Exemple 6 :

Enoncé :

Calculer $I_6 = \int_0^1 \frac{t}{t^2-t+1}.dt = \int_0^1 \frac{t}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.dt$

Résolution :

On pose $t - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$

Ainsi, on obtient

$$\boldsymbol{I_6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{(1+\sqrt{3}).u}{u^2+1}.du = \frac{1}{\sqrt{3}}.\int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (\frac{1}{u^2+1} + \frac{\sqrt{3}.u}{u^2+1}).du = \frac{1}{\sqrt{3}}.[\arctan(u)]_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{3.\sqrt{3}}}$$

Car $\frac{\sqrt{3}.u}{u^2+1}$ est une fonction impaire donc son intégrale vaut 0.